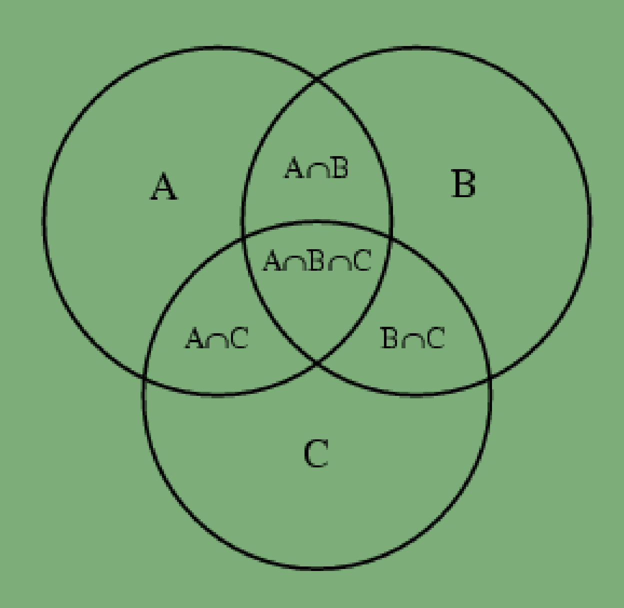
PROBLEMAS DE MATEMÁTICA DISCRETA:

CONJUNTOS, ÁLGEBRA DE BOOLE Y RELACIONES

por

JAVIER RODRIGO HITOS
DANILO MAGISTRALI



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-89-01

PROBLEMAS DE MATEMÁTICA DISCRETA:

CONJUNTOS, ÁLGEBRA DE BOOLE Y RELACIONES

por

JAVIER RODRIGO HITOS
DANILO MAGISTRALI

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-89-01

C U A D E R N O S
D E L   I N S T I T U T O
J U A N   D E   H E R R E R A

NUMERACIÓN

2 Área
51 Autor
09 Ordinal de cuaderno (del autor)

TEMAS

1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN
0 VARIOS

Problemas de matemática discreta: conjuntos, álgebra de Boole y relaciones.

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Gestión y portada: Almudena Gil Sancho.
CUADERNO 393.01 / 3-89-01
ISBN-13 (obra completa): 978-84-9728-449-3
ISBN-13: 978-84-9728-450-9
Depósito Legal: M-7442-2013

Índice

Introducción

La matemática discreta es el estudio de estructuras matemáticas que son fundamentalmente discretas y no continuas. A diferencia de los números reales que tienen la propiedad de variar “sin problemas”, los objetos estudiados en matemáticas discretas - tales como enteros, gráficos, y las declaraciones de la lógica - no varían suavemente de esta manera, sino tienen valores discretos. Objetos discretos a menudo se pueden enumerar con enteros. Más formalmente, la matemática discreta se ha caracterizado por el hecho de que se ocupa de conjuntos numerables (conjuntos que tienen la misma cardinalidad que los subconjuntos de los números naturales).

El conjunto de objetos estudiados en matemática discreta puede ser finito o infinito. El término matemáticas finitas se aplica a veces a las partes del campo de las matemáticas discretas que trata con conjuntos finitos, en particular las áreas relevantes para las empresas. Estudia las posibles relaciones que se establecen entre los elementos de un conjunto, para así tener más información sobre el comportamiento de los mismos.

La investigación en matemática discreta ha aumentado en la última mitad del siglo XX, en parte debido al desarrollo de las computadoras digitales que operan en pasos discretos y almacenan datos en bits discretos. Muchos conceptos de la matemática discreta son útiles en el estudio y en la descripción de objetos y problemas en distintas ramas de la ciencia de la computación, tales como algoritmos de computación, lenguajes de programación, criptografía y desarrollo de software. Además, las implementaciones informáticas son significativas en la aplicación de las ideas de la matemática discreta a problemas del mundo real, como en la investigación operativa.

En este cuaderno se proponen ejercicios y su solución sobre dos temas específicos de la matemática discreta.

En la primera parte se tratará de la Teoría de conjuntos y del Álgebra de Boole. Se verán nuevas herramientas para manejar estos conceptos, como el método de simplificación de funciones lógicas de Quine-McCluskey.

En la segunda parte se propondrán problemas sobre las relaciones estudiando sus propiedades para poder clasificarlas y representarlas. Se analizarán dos tipos importantes de relaciones: de equivalencia y de orden.

TEMA 1: **APLICACIONES DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS Y DEL ÁLGEBRA DE BOOLE**

Contenidos:

1.- Conjuntos borrosos.

2.- Técnicas de simplificación de funciones lógicas.

Objetivos:

Aplicar conceptos ya estudiados en cursos anteriores ó que se estudian en este curso, como conjuntos y Álgebra de Boole. Ver nuevas herramientas para manejar estos conceptos, como el método de simplificación de funciones lógicas de Quine-McCluskey.

Bibliografía básica:

Los contenidos teóricos del epígrafe 1 corresponden al apartado 3.4 del capítulo 3 del libro *Matemática Discreta* de Félix García Merayo. El epígrafe 2 (técnica de simplificación de funciones lógicas de Quine-McCluskey) corresponde al apartado 2.11 del capítulo 2 del mismo libro.

PROBLEMAS TEMA 1

1.- a) Dar un ejemplo de dos conjuntos borrosos A y B tales que $A \cap B = \overline{A}$.

b) Dar un ejemplo, si es posible, de dos conjuntos borrosos F y R, distintos del vacío y del conjunto universal, tales que $F \cap \overline{R} = F$.

c) Dar un ejemplo de un conjunto borroso A tal que $A = \overline{A}$.

2.- Simplificar las expresiones siguientes utilizando el método de Quine-McCluskey, siendo w, x, y, z elementos de un Álgebra de Boole.

i) $\overline{x}\,y\,z + \overline{x}\,y\,\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}\,z + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + x\,y\,z + x\,y\,\overline{z} + x\,\overline{y}\,\overline{z}$

ii) $\overline{w}\,x\,\overline{y}\,z + \overline{w}\,\overline{x}\,y\,z + w\,x\,y\,\overline{z} + w\,\overline{x}\,y\,z + \overline{w}\,x\,y\,z + w\,x\,\overline{y}\,z + w\,x\,y\,z$

3.- En una habitación se encuentran tres estudiantes que deciden que sólo se encienda la luz de dicha habitación si lo desea la mayoría. Encontrar la expresión más sencilla de la función que indica cuándo se enciende la luz, utilizando el método de Quine-McCluskey.

4.- En una urna hay cuatro bolas con los números 1, 3, 4 y 5. Se extraen k bolas de la urna, donde k puede ser cualquier número entre cero y cuatro, y se suman sus números. Utilizando el método de Quine-McCluskey, indicar de la forma más sencilla posible el hecho de que el resultado de la suma sea mayor que ocho. (Si no se saca ninguna bola, se entiende que la suma de los números de las bolas es 0).

5.- Sean números binarios de la forma *abcd*. Encontrar la expresión más sencilla de la función que indica qué número de éstos es primo, utilizando el método de Quine-McCluskey (los números 0 y 1 no se consideran primos).

6.- Una empresa de componentes electrónicos tiene 5 sucursales llamadas Acess, Boex, Centra, Davok y Enua. La empresa desea subir los precios de los componentes en todas las sucursales pero para ello se deben de poner de acuerdo todos los gerentes. Se decide que se subirán los precios si lo decide la mayoría. Hay unas particularidades que son:

- Acess y Boex, por competencia, votarán siempre lo contrario una de otra.
- Si Boex y Centra votan sí, entonces se suben los precios, sin tener en cuenta los votos de los demás.
- Si Boex y Enua votan no, no se suben los precios, sin tener en cuenta los votos de los demás.

Usar el método de Quine-McCluskey para hallar la expresión más sencilla como suma de productos que exprese en qué condiciones se suben los precios.

Soluciones problemas tema 1

1.- a) Dar un ejemplo de dos conjuntos borrosos A y B tales que $A \cap B = \overline{A}$.

b) Dar un ejemplo, si es posible, de dos conjuntos borrosos F y R tales que $F \cap \overline{R} = F$.

c) Dar un ejemplo de un conjunto borroso A tal que $A = \overline{A}$.

Solución

a) Como $p_{A \cap B}(x) = \min\{p_A(x), p_B(x)\}$, $p_{\overline{A}}(x) = 1 - p_A(x)$, ha de ser:

$\min\{p_A(x), p_B(x)\} = 1 - p_A(x) \ \ \forall x \in U$. Un ejemplo es:

$$A = \{(Alicia, 0.6), (Blas, 0.9), (Federico, 0.6), (Óscar, 0.9), (Rita, 0.5)\},$$
$$B = \{(Alicia, 0.4), (Blas, 0.1), (Federico, 0.4), (Óscar, 0.1), (Rita, 0.5)\}.$$

(Aquí $B = \overline{A}$. El conjunto A cumple por tanto que $A \cap \overline{A} = \overline{A}$).

b) Si las pertenencias a F y R son todas menores que $\frac{1}{2}$, entonces las pertenencias a $\overline{R}$ serán mayores que $\frac{1}{2}$, por lo que $\min\{p_F(x), p_{\overline{R}}(x)\} = p_F(x)$ y $F \cap \overline{R} = F$. Puede ser por ejemplo $F = \{(Alicia, 0.1), (Blas, 0.1), (Federico, 0.1), (Óscar, 0.1), (Rita, 0.1)\}$,
$R = \{(Alicia, 0.2), (Blas, 0.2), (Federico, 0.2), (Óscar, 0.2), (Rita, 0.2)\}$

c) Como $p_{\overline{A}}(x) = 1 - p_A(x)$, ha de ser $1 - p_A(x) = p_A(x) \Leftrightarrow p_A(x) = \frac{1}{2} \ \ \forall x \in U$. Un ejemplo es $A = \{(Alicia, 0.5), (Blas, 0.5), (Federico, 0.5), (Óscar, 0.5), (Rita, 0.5)\}$.

2.- Simplificar las expresiones siguientes utilizando el método de Quine-McCluskey, siendo w x, y, z elementos de un Álgebra de Boole.

i) $\overline{x}\, y\, z + \overline{x}\, y\, \overline{z} + \overline{x}\, \overline{y}\, z + \overline{x}\, \overline{y}\, \overline{z} + x\, y\, z + x\, y\, \overline{z} + x\, \overline{y}\, \overline{z}$

ii) $\overline{w}\, x\, \overline{y}\, z + \overline{w}\, \overline{x}\, y\, z + w\, x\, y\, \overline{z} + w\, \overline{x}\, y\, z + \overline{w}\, x\, y\, z + w\, x\, \overline{y}\, z + w\, x\, y\, z$

Solución

i) Tenemos con 3 unos $x\,y\,z \to 111$, con 2 unos $\overline{x}\,y\,z \to 011$, $x\,y\,\overline{z} \to 110$, con 1 uno $\overline{x}\,y\,\overline{z} \to 010$, $\overline{x}\,\overline{y}\,z \to 001$, $x\,\overline{y}\,\overline{z} \to 100$ y con 0 unos $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \to 000$; 111 con 011 se simplifica a –11, que corresponde a $y\,z$, 111 con 110 se simplifica a 11-, que corresponde a $x\,y$; 011 con 010 se simplifica a 01-, que corresponde a $\overline{x}\,y$; 011 con 001 se simplifica a 0-1, que corresponde a $\overline{x}\,z$; 110 con 010 se simplifica a –10, que corresponde a $y\,\overline{z}$; 110 con 100 se simplifican a 1–0, que corresponde a $x\,\overline{z}$; 010 con 000 se simplifica a 0-0, que corresponde a $\overline{x}\,\overline{z}$, 001 con 000 se simplifica a 00-, que corresponde a $\overline{x}\,\overline{y}$, 100 con 000 se simplifica a –00, que corresponde a $\overline{y}\,\overline{z}$;

-11 con –10 se simplifica a -1-, que corresponde a y, -10 con -00 se simplifica a --0, que corresponde a $\overline{z}$, 11- con 01- se simplifica a -1-, que corresponde a y, 01- con 00- se simplifica a 0--, que corresponde a $\overline{x}$, 0-1 con 0-0 se simplifica a 0--, que corresponde a $\overline{x}$, 1-0 con 0-0 se simplifica a --0, que corresponde a $\overline{z}$, y ya no hay más simplificaciones posibles. Hemos utilizado todos los términos de la expresión y los simplificados a 2 términos, y ninguno de los simplificados a 1 término. Luego la expresión más simplificada es $\overline{x} + y + \overline{z}$.

ii) Tenemos con 4 unos $w\,x\,y\,z \to 1111$, con 3 unos $w\,x\,y\,\overline{z} \to 1110$, $w\,\overline{x}\,y\,z \to 1011$, $\overline{w}\,x\,y\,z \to 0111$, $w\,x\,\overline{y}\,z \to 1101$, y con 2 unos $\overline{w}\,x\,\overline{y}\,z \to 0101$, $\overline{w}\,\overline{x}\,y\,z \to 0011$;

1111 con 1110 se simplifica a 111-, que corresponde a $w\,x\,y$, 1111 con 1011 se simplifica a 1-11, que corresponde a $w\,y\,z$, 1111 con 0111 se simplifica a –111, que corresponde a $x\,y\,z$, 1111 con 1101 se simplifica a 11-1, que corresponde a $w\,x\,z$;

1011 con 0011 se simplifica a –011, que corresponde a $\overline{x}\,y\,z$, 0111 con 0101 se simplifica a 01-1, que corresponde a $\overline{w}\,x\,z$, 0111 con 0011 se simplifica a 0-11, que corresponde a $\overline{w}\,y\,z$, 1101 con 0101 se simplifica a –101, que corresponde a $x\,\overline{y}\,z$;

1-11 con 0-11 se simplifica a --11, que corresponde a $y\,z$, -111 con –011 se simplifica a --11, que corresponde a $y\,z$, -111 con –101 se simplifica a –1-1, que corresponde a $x\,z$, 11-1 con 01-1 se simplifica a –1-1, que corresponde a $x\,z$, y ya no hay más simplificaciones. Hemos utilizado todos los términos salvo 111- y los de 2 factores, luego la simplificación es de momento $w\,x\,y + x\,z + y\,z$. Vemos si se puede quitar algún término:

	$\overline{w}\, x\, \overline{y}\, z$	$\overline{w}\, \overline{x}\, y\, z$	$w\, x\, y\, \overline{z}$	$w\, \overline{x}\, y\, z$	$\overline{w}\, x\, y\, z$	$w\, x\, \overline{y}\, z$	$w\, x\, y\, z$
$w\, x\, y$			x				x
$x\, z$	x				x	x	x
$y\, z$		x		x	x		x

Los 3 términos son imprescindibles porque cada uno de ellos es el único que cubre uno de los 3 primeros términos de la expresión, luego no se puede quitar ninguno y la simplificación anterior es la mejor posible.

3.- En una habitación se encuentran tres estudiantes que deciden que sólo se encienda la luz de dicha habitación si lo desea la mayoría. Encontrar la expresión más sencilla de la función que indica cuándo se enciende la luz, utilizando el método de Quine-McCluskey.

Solución

Si definimos $x_i = \begin{cases} 1\, si\ el\ estudiante\ i\ quiere\ encender\ la\ luz \\ 0\ en\ caso\ contrario \end{cases}$, la expresión que nos da cuándo se enciende la luz es $x_1\ x_2\ x_3 + x_1\ x_2\ \overline{x}_3 + x_1\ \overline{x}_2\ x_3 + \overline{x}_1\ x_2\ x_3$. Con 3 unos está $x_1\ x_2\ x_3 \to 111$, y con 2 unos están $x_1\ x_2\ \overline{x}_3 \to 110$, $x_1\ \overline{x}_2\ x_3 \to 101$, $\overline{x}_1\ x_2\ x_3 \to 011$; 111 con 110 se simplifica a 11-, que corresponde a $x_1\ x_2$, 111 con 101 se simplifica a:

1-1, que corresponde a $x_1\ x_3$, 111 con 011 se simplifica a -11, que corresponde a $x_2\ x_3$.

Hemos usado todos los términos de la expresión y ninguno de los simplificados, luego queda de momento: $x_1\ x_2 + x_1\ x_3 + x_2\ x_3$. Vemos si se puede quitar algún término:

	$x_1\ x_2\ x_3$	$x_1\ x_2\ \overline{x}_3$	$x_1\ \overline{x}_2\ x_3$	$\overline{x}_1\ x_2\ x_3$
$x_1\ x_2$	x	x		
$x_1\ x_3$	x		x	

$x_2\ x_3$	x			x

Todos son imprescindibles porque cada uno es el único que cubre a un determinado término de la expresión, luego la anterior es la expresión más simplificada.

4.- En una urna hay cuatro bolas con los números 1, 3, 4 y 5. Se extraen k bolas de la urna, donde k puede ser cualquier número entre cero y cuatro, y se suman sus números. Utilizando el método de Quine-McCluskey, indicar de la forma más sencilla posible el hecho de que el resultado de la suma sea mayor que ocho. (Si no se saca ninguna bola, se entiende que la suma de los números de las bolas es 0).

Solución

Si llamamos $x_i = \begin{cases} 1 \text{ si extraemos la bola } i \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases}$, la expresión a simplificar es:

$\bar{x}_1\ \bar{x}_2\ x_3\ x_4 + x_1\ x_2\ \bar{x}_3\ x_4 + x_1\ \bar{x}_2\ x_3\ x_4 + \bar{x}_1\ x_2\ x_3\ x_4 + x_1\ x_2\ x_3\ x_4$.

Hay un término con 4 unos: $x_1\ x_2\ x_3\ x_4 \to 1111$, tres términos con 3 unos: $x_1\ x_2\ \bar{x}_3\ x_4 \to 1101$, $x_1\ \bar{x}_2\ x_3\ x_4 \to 1011$, $\bar{x}_1\ x_2\ x_3\ x_4 \to 0111$, y un término con 2 unos: $\bar{x}_1\ \bar{x}_2\ x_3\ x_4 \to 0011$; 1111 con 1101 se simplifica a 11-1, que corresponde a $x_1\ x_2\ x_4$, 1111 con 1011 se simplifica a 1-11, que corresponde a $x_1\ x_3\ x_4$, 1111 con 0111 se simplifica a –111, que corresponde a $x_2\ x_3\ x_4$, 1011 con 0011 se simplifica a –011, que corresponde a $\bar{x}_2\ x_3\ x_4$, 0111 con 0011 se simplifica a 0-11, que corresponde a $\bar{x}_1\ x_3\ x_4$; 1-11 con 0-11 se simplifica a --11, que corresponde a $x_3\ x_4$; -111 con -011 se simplifica a --11, que corresponde a $x_3\ x_4$. Ya no se puede simplificar más, y no hemos utilizado 11-1 ni --11, luego la simplificación es de momento $x_1\ x_2\ x_4 + x_3\ x_4$. Parece que no se puede quitar ningún término, porque no está ninguno contenido en el otro. Lo comprobamos:

	$\bar{x}_1\ \bar{x}_2\ x_3\ x_4$	$x_1\ x_2\ \bar{x}_3\ x_4$	$\bar{x}_1\ x_2\ x_3\ x_4$	$x_1\ x_2\ x_3\ x_4$
$x_1\ x_2\ x_4$		x		x

$x_3\ x_4$	x		x	x

$x_1\ x_2\ x_4$ es el único que cubre $x_1\ x_2\ \overline{x}_3\ x_4$, $x_3\ x_4$ es el único que cubre $\overline{x}_1\ \overline{x}_2\ x_3\ x_4$, luego no se pueden quitar ninguno de los 2 y la expresión más simplificada es la anterior (se cumple el enunciado siempre que saquemos las 2 últimas bolas ó la primera la segunda y la cuarta).

5.- Sean números binarios de la forma *abcd*. Encontrar la expresión más sencilla de la función que indica qué número de éstos es primo, utilizando el método de Quine-McCluskey.

Solución

Los números primos menores ó iguales que $1111 = 2^3 + 2^2 + 2 + 1 = 15$ son 2=0010, 3=0011, 5=0101, 7=0111, 11=1011 y 13=1101; 1011 y 0011 se simplifican a -011; 0111 y 0011 se simplifican a 0-11; 0111 y 0101 se simplifican a 01-1; 1101 y 0101 se simplifican a -101; 0011 y 0010 se simplifican a 001-. Ya no hay más simplificaciones, luego la expresión provisional es $\overline{x}_2\ x_3\ x_4 + \overline{x}_1\ x_3\ x_4 + \overline{x}_1\ x_2\ x_4 + x_2\ \overline{x}_3\ x_4$

	$\overline{x}_1\overline{x}_2x_3\overline{x}_4$	$\overline{x}_1\overline{x}_2x_3x_4$	$\overline{x}_1x_2\overline{x}_3x_4$	$\overline{x}_1x_2x_3x_4$	$x_1\overline{x}_2x_3x_4$	$x_1x_2\overline{x}_3x_4$
$\overline{x}_2\ x_3\ x_4$		x			x	
$\overline{x}_1\ x_3\ x_4$		x		x		
$\overline{x}_1\ x_2\ x_4$			x	x		
$x_2\ \overline{x}_3\ x_4$			x			x
$\overline{x}_1\ \overline{x}_2\ x_3$	x	x				

$\overline{x}_2\ x_3\ x_4$, $x_2\ \overline{x}_3\ x_4$, $\overline{x}_1\ \overline{x}_2\ x_3$ son imprescindibles, ya que cada uno es el único que cubre un minterm. Con estos cubrimos todos salvo $\overline{x}_1x_2x_3x_4$, luego necesitamos uno de $\overline{x}_1\ x_3\ x_4$,

$\overline{x}_1\, x_2\, x_4$, luego las expresiones más simplificadas posibles son $\overline{x}_2\, x_3\, x_4 + \overline{x}_1\, x_3\, x_4 + \overline{x}_1\, \overline{x}_2\, x_3 + x_2\, \overline{x}_3\, x_4$, $\overline{x}_2\, x_3\, x_4 + \overline{x}_1\, x_2\, x_4 + \overline{x}_1\, \overline{x}_2\, x_3 + x_2\, \overline{x}_3\, x_4$

6.- Una empresa de componentes electrónicos tiene 5 sucursales llamadas Acess, Boex, Centra, Davok y Enua. La empresa desea subir los precios de los componentes en todas las sucursales pero para ello se deben de poner de acuerdo todos los gerentes. Se decide que se subirán los precios si lo decide la mayoría. Hay unas particularidades que son:

- Acess y Boex, por competencia, votarán siempre lo contrario una de otra.
- Si Boex y Centra votan sí, entonces se suben los precios, sin tener en cuenta los votos de los demás.
- Si Boex y Enua votan no, no se suben los precios, sin tener en cuenta los votos de los demás.

Usar el método de Quine-McCluskey para hallar la expresión más sencilla como suma de productos que exprese en qué condiciones se suben los precios.

Solución

Llamamos $A = \text{Acess}$, $B = \text{Boex}$,... Como $A = \overline{B}$ por la condición 1, podemos hacer la expresión con B, C, D, E.

Por la condición 2, siempre que se dé $B\,C$ se suben los precios, luego situaciones favorables son $B\,C\,D\,E + B\,C\,\overline{D}\,E + B\,C\,D\,\overline{E} + B\,C\,\overline{D}\,\overline{E}$. Si se da $B\,\overline{C}$ A votará no, luego para que haya mayoría que vote sí han de votar sí D, E, luego la única situación favorable en este caso es $B\,\overline{C}\,D\,E$. Si se da $\overline{B}\,C$ A votará sí, luego para que haya mayoría que vote sí han de votar sí D ó E, luego las situaciones favorables en este caso son $\overline{B}\,C\,D\,E + \overline{B}\,C\,\overline{D}\,E + \overline{B}\,C\,D\,\overline{E}$. Pero el último término hay que quitarlo por la condición 3, ya que Boex y Enua votan no, luego quedaría $\overline{B}\,C\,D\,E + \overline{B}\,C\,\overline{D}\,E$. Si se da $\overline{B}\,\overline{C}$ A votará sí, luego para que haya mayoría que vote sí han de votar sí D, E, luego la única situación favorable en este caso es $\overline{B}\,\overline{C}\,D\,E$. Entonces la expresión en minterms que dice cuándo se suben los precios es

$B\,C\,D\,E + B\,C\,\overline{D}\,E + B\,C\,D\,\overline{E} + B\,C\,\overline{D}\,\overline{E} + B\,\overline{C}\,D\,E + \overline{B}\,C\,D\,E + \overline{B}\,C\,\overline{D}\,E + \overline{B}\,\overline{C}\,D\,E$

Ordenando por unos, tenemos las cadenas de bits 1111, 1110, 1101, 1011, 0111, 1100, 0101, 0011.

1111 se simplifica con las de 3 unos a 111-, 11-1, 1-11, -111; 1110 con 1100 se simplifica a 11-0; 1101 con 1100 se simplifica a 110-;

1101 con 0101 se simplifica a -101; 1011 con 0011 se simplifica a -011; 0111 con 0101 se simplifica a 01-1; 0111 con 0011 se simplifica a 0-11;

Tenemos entonces 111- y 110-, que se simplifica a 11--, 11-1 y 01-1, que se simplifica a -1-1, 1-11 y 0-11, que se simplifica a –11. Ya no hay más simplificaciones nuevas, luego la simplificación provisional es $B\,C + C\,E + D\,E$. Esta es la definitiva, ya que no se puede quitar ninguno porque son los únicos que cubren respectivamente a $B\,C\,\overline{D}\,\overline{E}$, $\overline{B}\,C\,\overline{D}\,E$, $\overline{B}\,\overline{C}\,D\,E$. (Por tanto, se sube el precio si votan sí B y C, ó E con C ó D)

TEMA 2: **RELACIONES**

Contenidos:

1.- Relaciones binarias y propiedades.

2.- Representación de relaciones.

3.- Composición de relaciones.

4.- Relación de equivalencia.

5.- Relación de orden.

6.- Elementos extremales.

Objetivos:

Estudiar las posibles relaciones que se establecen entre los elementos de un conjunto, para así tener más información sobre el comportamiento de los mismos.

Estudiar las propiedades de estas relaciones para poder clasificarlas y representarlas.

Analizar dos tipos importantes de relaciones: de equivalencia y de orden.

Bibliografía básica:

Los contenidos teóricos de este tema corresponden al capítulo 4 del libro *Matemática Discreta* de Félix García Merayo, excepto los apartados 4.4, 4.5 y al apéndice 2 del libro *Problemas de Álgebra* de Agustín de la Villa.

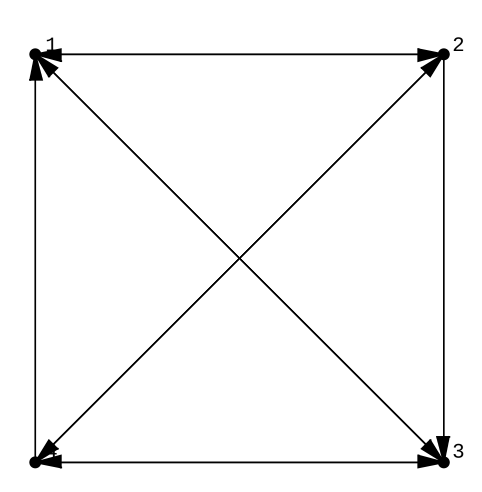
PROBLEMAS TEMA 2

1.- Dar las propiedades de la siguiente relación en el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y representar su correspondiente digrafo y matriz booleana:

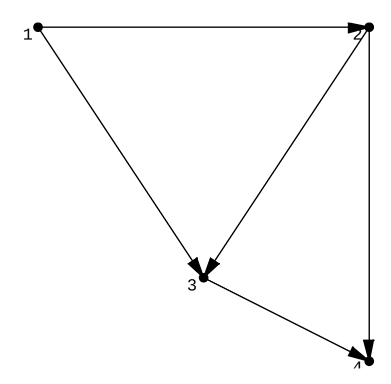
$R = \{(1,1), (2,2), (1,2), (2,1), (3,3), (1,3)\}$

2.- Representar las relaciones dadas por los siguientes digrafos por matrices booleanas y estudiar sus propiedades:

a)



b)



3.- Estudiar las propiedades de las relaciones establecidas por las siguientes matrices y estudiar si representan relaciones de equivalencia:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4.- Sea la relación $R_1 = \{(1,1), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (3,1), (3, 3), (3, 4)\}$ en el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

a) Hallar $R_1^{\ 2} = R_1 \circ R_1$ (darlo en forma de conjunto) y $M_{R_1^{\ 2}}$. ¿Se cumple que $R_1 \subset R_1^{\ 2}$, ó que $R_1^{\ 2} \subset R_1$, ó que $R_1 = R_1^{\ 2}$? A la vista del resultado, ¿es R_1 transitiva?

b) Repetir el apartado a) para $R_2 = \{(1,1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$ en $B = \{1, 2, 3\}$.

5.- Comprobar que son de equivalencia las siguientes relaciones en $\Re^2$ y caracterizar los conjuntos cocientes:

i) $(x, y) R (x', y')$ si $x = x'$

ii) $(x, y) R (x', y')$ si $x + 2y = x' + 2y'$

6.- En el conjunto $A = (\Re - \{0\}) \times \Re$ se define la relación:

$(x_1, y_1) R (x_2, y_2)$ si $\dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{y_2}{x_2}$ y $x_1 \le x_2$.

Demostrar que es una relación de orden. ¿Es un orden total? Representar el conjunto de puntos comparables con $(1,1)$.

7.- a) Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y sea R la relación de orden $\le$ usual en A.

Representar el diagrama de Hasse de la relación R y determinar sus elementos maximales y minimales y decir si en A hay máximo y mínimo.

b) Sea B el conjunto formado por los números naturales divisores de 24, sin incluir al mismo. Sea R la relación ser divisor ($a\ R\ b$, si a divide a b). Demostrar que es una relación de orden. Representar el diagrama de Hasse de la relación R y determinar sus elementos maximales y minimales y decir si en B hay máximo y mínimo. ¿Tiene el conjunto con esta relación estructura de retículo?

Soluciones problemas tema 2

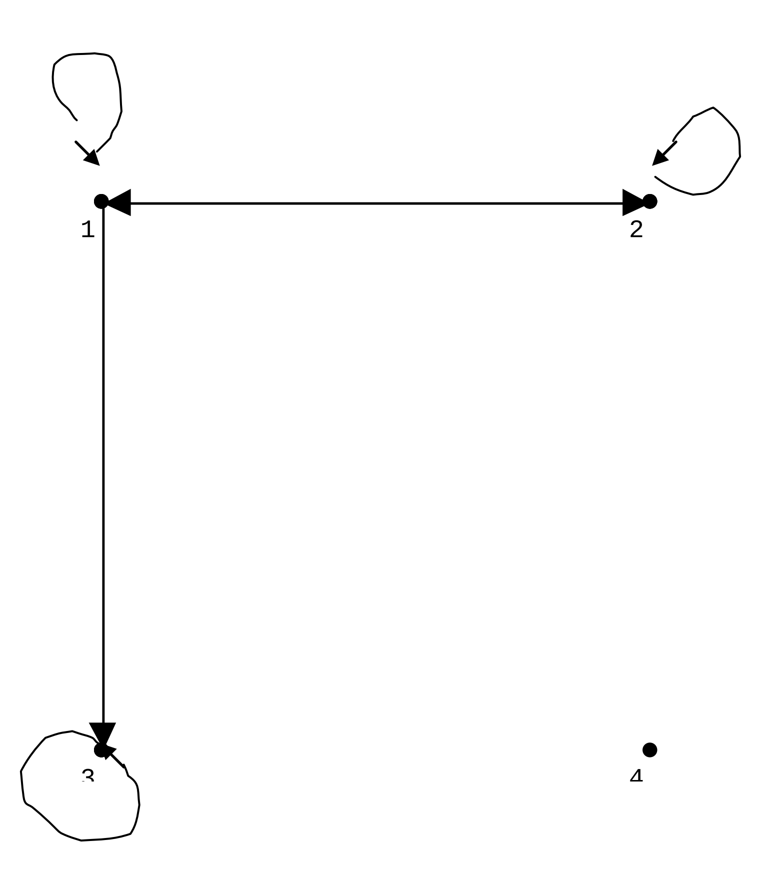
1.- Dar las propiedades de la siguiente relación en el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y representar su correspondiente digrafo y matriz booleana:

$R = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (3, 3), (1, 3)\}$

Solución

Como $(4, 4) \notin R$, R no cumple la propiedad reflexiva, como $(1, 3) \in R$ y $(3, 1) \notin R$, R no cumple la propiedad simétrica, como $(1, 2) \in R$ y $(2, 1) \in R$, siendo $1 \neq 2$, R no cumple la propiedad antisimétrica, como $(2, 1) \in R$, $(1, 3) \in R$ y $(2, 3) \notin R$, R no cumple la propiedad transitiva.

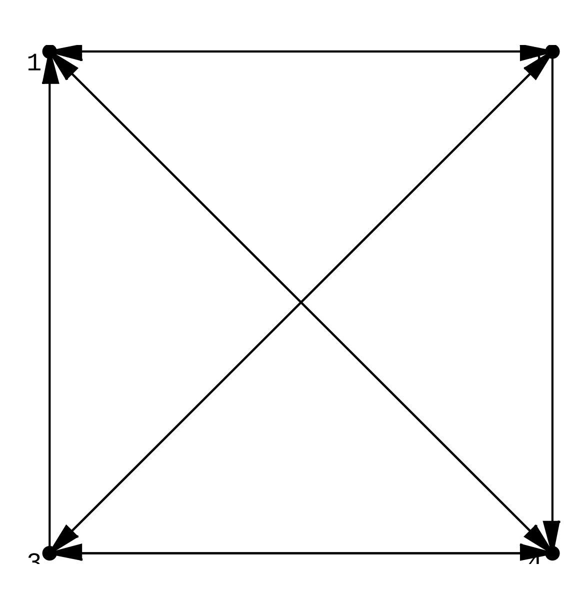
El digrafo es:



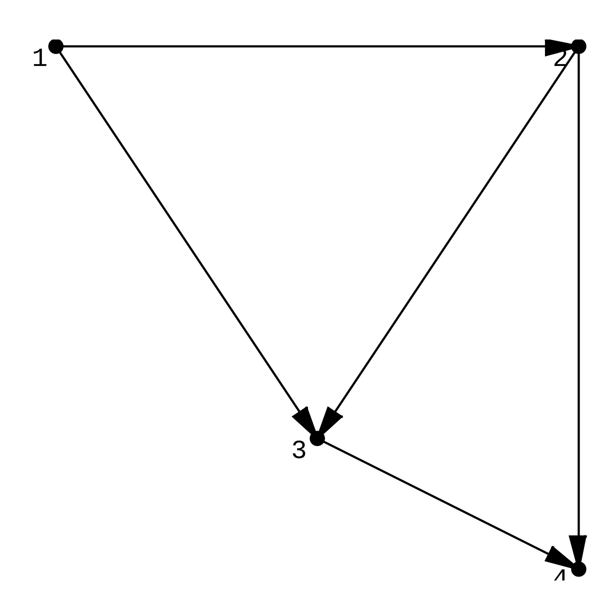
La matriz booleana es: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.- Representar las relaciones dadas por los siguientes digrafos por matrices booleanas y estudiar sus propiedades:

a)



b)



Solución

a) La matriz booleana es $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Como no hay unos en la diagonal, la relación no cumple la propiedad reflexiva, como hay un 1 en el elemento $(3,1)$ y no lo hay en el $(1,3)$, la relación no cumple la propiedad simétrica, como hay unos en los elementos $(1,2)$ y $(2,1)$, la relación no cumple la propiedad antisimétrica;

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$. Como no se cumple que $M^2 \leq M$, siendo M la matriz booleana, ya que el elemento $(1,1)$ de M^2 es 1 y el de M es 0, la relación no cumple la propiedad transitiva.

b) La matriz booleana es $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Como no hay unos en la diagonal, la relación no cumple la propiedad reflexiva, como hay un 1 en el elemento $(1,2)$ y no lo hay en el $(2,1)$, la relación no cumple la propiedad simétrica, Como no hay dos 1 en ningún elemento y su simétrico la relación cumple la propiedad antisimétrica;

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$. Como no se cumple que $M^2 \leq M$, ya que el elemento $(1,4)$ de M^2 es 1 y el de M es 0, la relación no cumple la propiedad transitiva (1 está relacionado con 2, 2 con 4, pero 1 no está relacionado con 4).

3.- Estudiar las propiedades de las relaciones establecidas por las siguientes matrices y estudiar si representan relaciones de equivalencia:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución

a) Como no hay unos en la diagonal, la relación no cumple la propiedad reflexiva, como es simétrica, la relación cumple la propiedad simétrica;

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$. Como no se cumple que $M^2 \le M$, ya que el elemento $(1,1)$ de M^2 es 1 y el de M es 0, la relación no cumple la propiedad transitiva, y por tanto no es de equivalencia.

b) Como hay unos en la diagonal, la relación cumple la propiedad reflexiva, como no es simétrica, la relación no cumple la propiedad simétrica, como $a_{12} = a_{21} = 1$, la relación no cumple la propiedad antisimétrica;

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Como no se cumple que $M^2 \le M$, ya que el elemento $(3,2)$ de M^2 es 1 y el de M es 0, la relación no cumple la propiedad transitiva, y por tanto no es de equivalencia.

4.- Sea la relación $R_1 = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,2),(3,1),(3,3),(3,4)\}$ en el conjunto $A = \{1,2,3,4\}$.

a) Hallar $R_1^{\,2} = R_1 \circ R_1$ y $M_{R_1^2}$. ¿Se cumple que $R_1 \subset R_1^{\,2}$, ó que $R_1^{\,2} \subset R_1$, ó que $R_1 = R_1^{\,2}$? A la vista del resultado, ¿Es R_1 transitiva?

b) Repetir el apartado a) para $R_2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\}$ en $B = \{1,2,3\}$.

Solución

a) Primero hallamos $M_{R_1^2}$, y la utilizamos para hallar $R_1^{\,2}$:

$$M_{R_1^2} = M_{R_1}\, M_{R_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, $R_1^{\,2} = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,2),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4)\}$ y $R_1 \subset R_1^{\,2}$. Como $R_1^{\,2}$ tiene más elementos que R_1 (el $(3,2)$), R_1 no es transitiva (existe un y tal que $3\,R_1\,y$, $y\,R_1\,2$, pero $3\,\overline{R_1}\,2$).

b) $M_{R_2^2} = M_{R_2}\, M_{R_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, por lo que:

$R_2^{\,2} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\} = R_2$, y entonces R_2 es transitiva (siempre que $(a,b) \in R_2^{\,2}$, es decir siempre que existe un c tal que $a\,R_2\,c$ y $c\,R_2\,b$, entonces $(a,b) \in R_2$, es decir, $a\,R_2\,b$).

5.- Comprobar que son de equivalencia las siguientes relaciones en $\Re^2$ y caracterizar los conjuntos cocientes:

i) $(x,y)\,R\,(x',y')$ si $x = x'$

ii) $(x,y)\,R\,(x',y')$ si $x + 2\,y = x' + 2\,y'$

Solución

i) $(x,y)\,R\,(x,y)$, ya que $x = x$, por lo que R cumple la propiedad reflexiva, si $(x,y)\,R\,(x',y')$, entonces $x = x'$, por lo que $x' = x$, y entonces $(x',y')\,R\,(x,y)$, por lo que R cumple la propiedad simétrica, si $(x,y)\,R\,(x',y')$ y $(x',y')\,R\,(x'',y'')$, entonces $x = x'$, $x' = x''$, por lo que $x = x''$ (las 2 son iguales a x') y entonces $(x,y)\,R\,(x'',y'')$ y R cumple la propiedad transitiva.

Como R cumple las 3 propiedades, es de equivalencia.

$[(a,b)] = \{(x,y) \in \Re^2 \,/\, x = a\}$, por lo que:

$\Re^2\big|_R = \{\{(x,y) \in \Re^2 \,/\, x = a\} / a \in \Re\}$ (es un conjunto de rectas verticales).

ii) $(x,y)\,R\,(x,y)$, ya que $x + 2y = x + 2y$, por lo que R cumple la propiedad reflexiva, si $(x,y)\,R\,(x',y')$, entonces $x + 2y = x' + 2y'$, por lo que $x' + 2y' = x + 2y$, y entonces $(x',y')\,R\,(x,y)$, por lo que R cumple la propiedad simétrica, si $(x,y)\,R\,(x',y')$ y $(x',y')\,R\,(x'',y'')$, entonces $x + 2y = x' + 2y'$, $x' + 2y' = x'' + 2y''$, por lo que $x + 2y = x'' + 2y''$ (las 2 son iguales a $x' + 2y'$) y entonces $(x,y)\,R\,(x'',y'')$ y R cumple la propiedad transitiva.

Como R cumple las 3 propiedades, es de equivalencia.

$[(a,b)] = \{(x,y) \in \Re^2 \,/\, x + 2y = a + 2b\} = \{(a + 2b - 2y, y) / y \in \Re\}$, por lo que:

$\Re^2\big|_R = \{\{(a + 2b - 2y, y) / y \in \Re\} / a \in \Re, b \in \Re\}$ (es un conjunto de rectas paralelas de pendiente $-\dfrac{1}{2}$).

6.- En el conjunto $A = (\Re - \{0\}) \times \Re$ se define la relación:

$$(x_1, y_1)\,R\,(x_2, y_2) \Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \text{ y } x_1 \le x_2 .$$

Demostrar que es una relación de orden. ¿Es un orden total? Representar el conjunto de puntos comparables con $(1,1)$.

Solución

$(x_1, y_1)\,R\,(x_1, y_1)$, ya que $\dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{y_1}{x_1}$ y $x_1 \le x_1$, luego R cumple la propiedad reflexiva, si $(x_1, y_1)\,R\,(x_2, y_2)$ y $(x_2, y_2)\,R\,(x_1, y_1)$, entonces se cumple que $\dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{y_2}{x_2}$ y $x_1 \le x_2$,

$\frac{y_2}{x_2}=\frac{y_1}{x_1}$ y $x_2 \le x_1$, por lo que $x_1 = x_2$, y entonces, sustituyendo en la igualdad, $\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_1} \Rightarrow y_1 = y_2$ por lo que $(x_1, y_1)=(x_2, y_2)$ y R cumple la propiedad antisimétrica., si $(x_1, y_1) R (x_2, y_2)$ y $(x_2, y_2) R (x_3, y_3)$, entonces se cumple que $\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}$ y $x_1 \le x_2$, $\frac{y_2}{x_2}=\frac{y_3}{x_3}$ y $x_2 \le x_3$, por lo que $\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_3}{x_3}$ y $x_1 \le x_3$, y entonces se cumple que $(x_1, y_1) R (x_3, y_3)$, luego R cumple la propiedad transitiva.

Por tanto, R es una relación de orden.

Sean $(1, 2)$, $(1, 3)$, no se cumple que $(1, 2) R (1, 3)$, porque $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{3}$, ni que $(1, 3) R (1, 2)$, porque $\frac{1}{3} \neq \frac{1}{2}$, luego no es un orden total.

Los puntos comparables con $(1,1)$ son los (x, y) tales que $(x, y) R (1,1)$ ó $(1,1) R (x, y)$, que son:

$$\left\{(x, y) \in (\Re - \{0\}) \times \Re \,/\, \frac{y}{x} = \frac{1}{1} = 1, x \le 1\right\} \cup \left\{(x, y) \in (\Re - \{0\}) \times \Re \,/\, 1 = \frac{1}{1} = \frac{y}{x}, x \ge 1\right\} = \{(x, x) / x \in \Re - \{0\}\}$$

7.- a) Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y sea R la relación de orden $\le$ usual en A.

Representar el diagrama de Hasse de la relación R y determinar sus elementos maximales y minimales y decir si en A hay máximo y mínimo.

Solución

El diagrama de Hasse es:

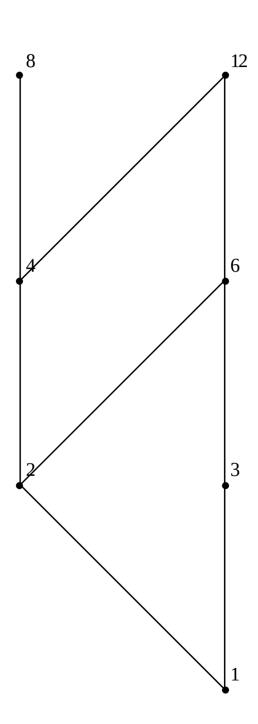
Se ve que $1 \leq x$ para todo $x \in A$, luego 1 es el mínimo de A y será el único elemento minimal, y se ve que $x \leq 5$ para todo $x \in A$, luego 5 es el máximo de A y será el único elemento maximal.

b) Sea B el conjunto formado por los números naturales divisores de 24, sin incluir al mismo. Sea R la relación ser divisor ($a\,R\,b$, si a divide a b). Demostrar que es una relación de orden. Representar el diagrama de Hasse de la relación R y determinar sus elementos maximales y minimales y decir si en B hay máximo y mínimo. ¿Tiene el conjunto con esta relación estructura de retículo?

Solución

Todo número se divide a sí mismo, luego $a\,R\,a$ para todo a, y R es reflexiva. Si $a\,R\,b$ y $b\,R\,a$, entonces existen $k, k' \in N$ tales que $b = k\,a$, $a = k'\,b$, por lo que $b = k\,k'\,b \Rightarrow k\,k' = 1$, con $k, k' \in N$, por lo que $k = k' = 1$, y entonces $b = a$ y por tanto R es antisimétrica. Si $a\,R\,b$ y $b\,R\,c$, entonces existen $k, k' \in N$ tales que $b = k\,a$, $c = k'\,b$, por lo que $c = k\,k'\,a$, con $k\,k' \in N$, y entonces $a\,R\,c$ y por tanto R es transitiva, por lo que es de orden. Como 1 divide a todo número natural, 1 es el mínimo y único elemento minimal; 8 es un divisor de 24 y no divide a ningún divisor propio de 24 (ya que $24 = 8 \times 3$), 12 es un divisor de 24 y no divide a ningún divisor propio de 24 (ya que $24 = 12 \times 2$), y esto no pasa con ningún otro divisor propio de 24, por lo que 8 y 12 son los elementos maximales y no hay máximo. Como B tiene 2 elementos maximales, no tiene estructura de retículo porque el conjunto $\{8, 12\}$ no está acotado superiormente.

Tenemos las siguientes cadenas de divisibilidades: $1 \mid 2 \mid 4 \mid 8$, $1 \mid 3 \mid 6 \mid 12$, y tenemos también que $2 \mid 6$, $4 \mid 12$, sin que haya ningún número entre los 2, luego el diagrama de Hasse de la relación será:



Bibliografía

Emilio Bujalance, *Elementos de matemática discreta*, Sanz y Torres, 2005

Félix García Merayo, *Matemática discreta*, Ediciones Paraninfo, S.A., 2005

Seymour Lipschutz, *2000 problemas resueltos de matemática discreta*, McGraw-Hill, 2004

Kenneth Rosen, *Matemática discreta y sus aplicaciones*, McGraw-Hill, 2004

Agustín de la Villa Cuenca, *Problemas de Álgebra*, CLAGSA, 2010

CUADERNO



Cuadernos.ijh@gmail.com
info@mairea-libros.com

